数理解析研究所講究録
686 巻 1989 年 162-174

完全2組グラフのS_k因子分解

近畿大理工　　潮 和彦 (Kazuhiko Ushio)

1. はじめに

S_kをk点を結ぶスターとする。成分がすべてS_kであるような全域部分グラフをS_k因子(S_k-Factor)とよぶ。完全2組グラフ$K_{m,n}$を，互いに線を共有しないように，S_k因子の和に分解するS_k因子分解の問題を考える。($k \geqq 3$)
S_k因子分解を巡回的に構成するときbaseとなるS_k因子をBase Factorとよぶ。Base Factorを用いたS_k因子分解について述べる。

2. $K_{m,n}$のS_k因子分解

$K_{m,n}$の2組の点集合をV_1, V_2 ($|V_1|=m, |V_2|=n$) とする。$K_{m,n}$のS_k因子分解において，S_k因子の数をr，1つのS_k因子に含まれるS_k成分の数をt，分解によって得られるS_k成分の総数をbとする。1つのS_k因子に含まれるt個のS_k成分のうち，中心点がV_1にあるS_k成分の数をt_1，中心点がV_2にあるS_k成分の数をt_2とする。分解によって得られたb個のS_k成分のうち，V_1の点uが中心点となるS_k成分の数をr_1，V_2の点vが中心点と

なるS_k成分の数をr_2とする。

<u>定理1</u>　$K_{m,n}$がS_k因子分解可能

$$\Longrightarrow \begin{cases} b=\frac{mn}{k-1},\ t=\frac{m+n}{k},\ r=\frac{kmn}{(k-1)(m+n)},\ t_1=\frac{(k-1)n-m}{k(k-2)}, \\ t_2=\frac{(k-1)m-n}{k(k-2)},\ r_1=\frac{\{(k-1)n-m\}n}{(k-1)(k-2)(m+n)},\ r_2=\frac{\{(k-1)m-n\}m}{(k-1)(k-2)(m+n)}, \\ m\leqq(k-1)n,\ n\leqq(k-1)m \end{cases}$$

このとき，$m=t_1+(k-1)t_2$，$n=(k-1)t_1+t_2$ が成り立つ。r_1, r_2は点u, vにdependしない。

<u>定理2</u>　$K_{n,n}$がS_k因子分解可能

$$\Longrightarrow n\equiv 0 \pmod{2k(k-1)}\ (k:\mathrm{odd}),\ n\equiv 0 \pmod{k(k-1)}\ (k:\mathrm{even})$$

<u>定理3</u>　$K_{m,n}$がS_3因子分解可能

$$\Longleftrightarrow b=\frac{mn}{2},\ t=\frac{m+n}{3},\ r=\frac{3mn}{2(m+n)},\ m\leqq 2n,\ n\leqq 2m$$

<u>定理4</u>（拡張定理）　$K_{m,n}$がS_k因子分解可能

$$\Longrightarrow K_{am,an}\text{は}S_k\text{因子分解可能}$$

このため，kを固定したとき，比較的小さなm, nに対して，定理1の必要条件の十分性を調べたらよい。一般性を失うことなく$m\leqq n$と仮定して，$m\leqq n\leqq(k-1)m$の場合を調べる。

<u>定理5</u>　$m=n=2k(k-1)\Longrightarrow K_{m,n}$は$S_k$因子分解可能

<u>定理6</u>　$k:\mathrm{odd}$のとき，$K_{n,n}$がS_k因子分解可能

$$\Longleftrightarrow n\equiv 0 \pmod{2k(k-1)}$$

<u>定理7</u>　$n=(k-1)m\Longrightarrow K_{m,n}$は$S_k$因子分解可能

3. S_k因子分解の巡回的構成とBase Factor

$m \leqq n < (k-1)m$ とする。このとき，$m = t_1 + (k-1)t_2$, $n = (k-1)t_1 + t_2$ において，$t_1, t_2 \neq 0$ である。S_k因子分解を巡回的に構成するとき，Base FactorとなるS_k因子は次のBase条件をみたす。

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Base条件：} \ m = r_m \times m_0,\ n = r_n \times n_0,\ r = r_m \times r_n, \\ t_1 = \alpha \times m_0,\ t_2 = \beta \times n_0 \end{array}}$$

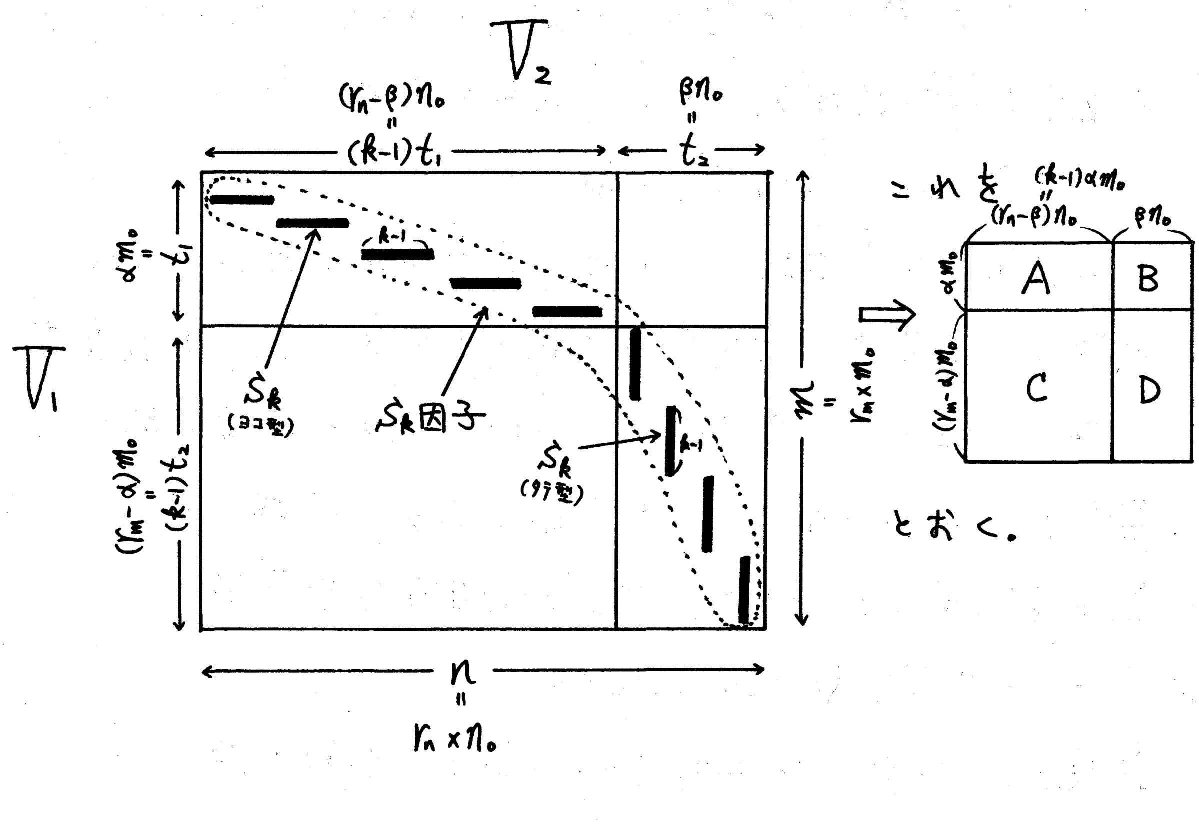
Base条件のもとで

$$m_0 n_0 = (k-1)t_1 + (k-1)t_2 = |E(S_k\text{因子})|$$

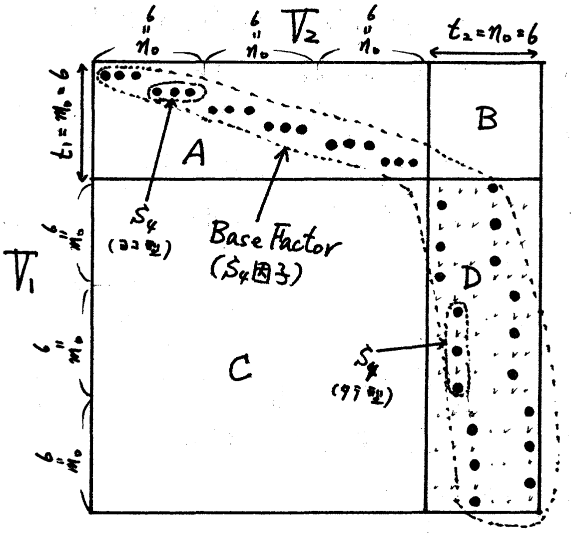
$$(k-1)t_1 = \{m_0 - (k-1)\beta\} n_0 = (r_n - \beta) n_0 \quad \therefore\ r_n - \beta = m_0 - (k-1)\beta$$

$$(k-1)t_2 = \{n_0 - (k-1)\alpha\} m_0 = (r_m - \alpha) m_0 \quad \therefore\ r_m - \alpha = n_0 - (k-1)\alpha$$

が成り立つ。これから，$m_0 > (k-1)\beta$, $n_0 > (k-1)\alpha$ が得られる。



Base Factor の例（$k=4, m=24, n=24, t_1=m_0=6, t_2=n_0=6, \alpha=\beta=1$）

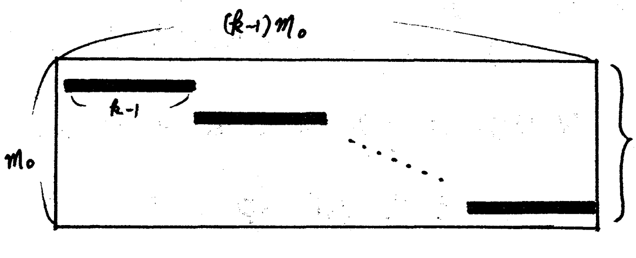


このBase Factor（S_4因子）を右へ$n_0=6$ずつ，下へ$m_0=6$ずつ巡回的にシフトさせれば，$4\times4=16$個のS_4因子が得られ，それらの和が$K_{24,24}$のS_4因子分解を与える。

この例から分るように，領域Aではヨコ型S_k（中心点がV_1にあるS_k）をt_1個とり，領域Dではタテ型S_k（中心点がV_2にあるS_k）をt_2個とってできるS_k因子を上手に選び，このS_k因子を右へn_0ずつ，下へm_0ずつ巡回的にシフトさせ，$r_m\times r_n$個のS_k因子が，領域A,B,C,Dを過不足なくカバーするならば，もとのS_k因子はBase Factorであり，得られた$r_m\times r_n$個のS_k因子の和が$K_{m,n}$のS_k因子分解を与える。この事は，定理1の必要条件をみたすパラメータm,n,kがBase条件をもみたすとき，常に成り立つ。以下にそれを示す。

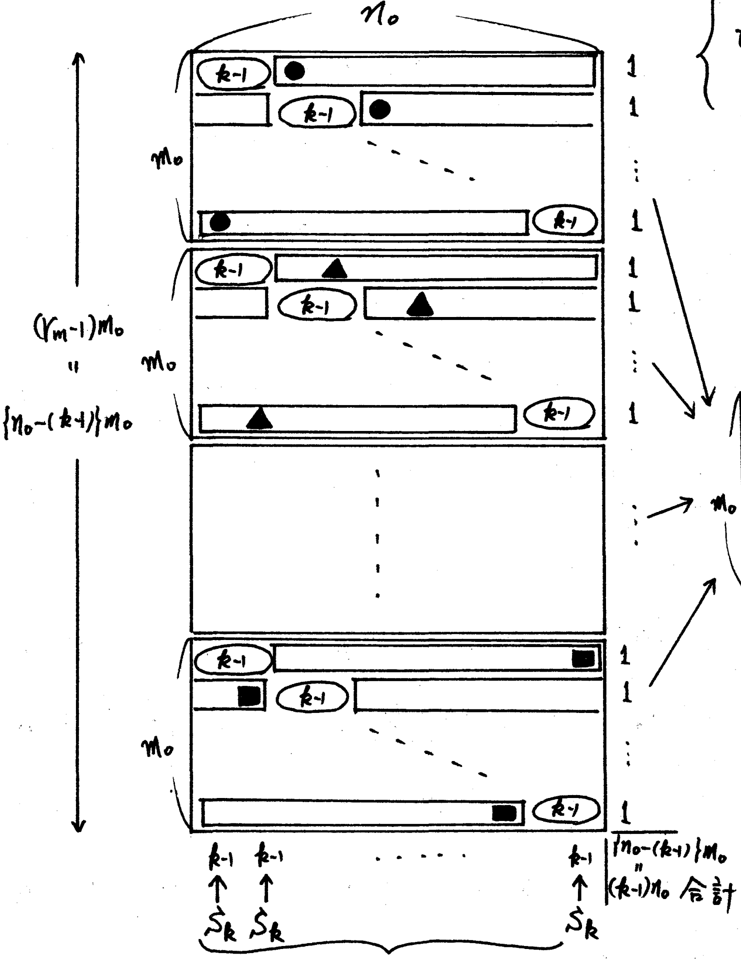
Lemma 1　$\alpha=\beta=1$ のBase条件 $\Longrightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

⊙領域A



ヨコ型S_kをm_0個とる。

領域D

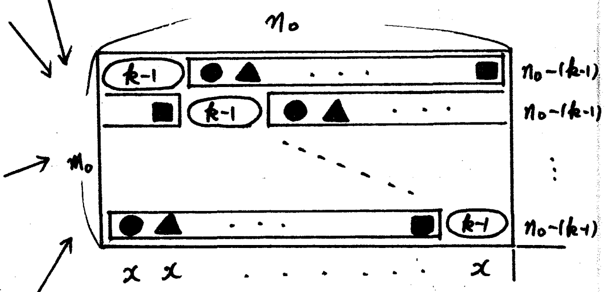


タテ型S_kをn_0個とる。

$$\left\{\begin{array}{l} m_0 n_0 = (k-1)t_1 + (k-1)t_2 \\ t_1 = \alpha m_0,\ t_2 = \beta n_0,\ \alpha = \beta = 1 \\ r_m - \alpha = n_0 - (k-1)\alpha \end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$m_0 n_0 = (k-1)m_0 + (k-1)n_0$$
$$r_m - 1 = n_0 - (k-1)$$



$$x = \frac{\{n_0-(k-1)\}m_0}{n_0} = \frac{(k-1)n_0}{n_0} = k-1$$

$$\therefore\ x = k-1$$

この様に領域Aでヨコ型S_kをm_0個，領域Dでタテ型S_kをn_0個とればBase Factorとなる。

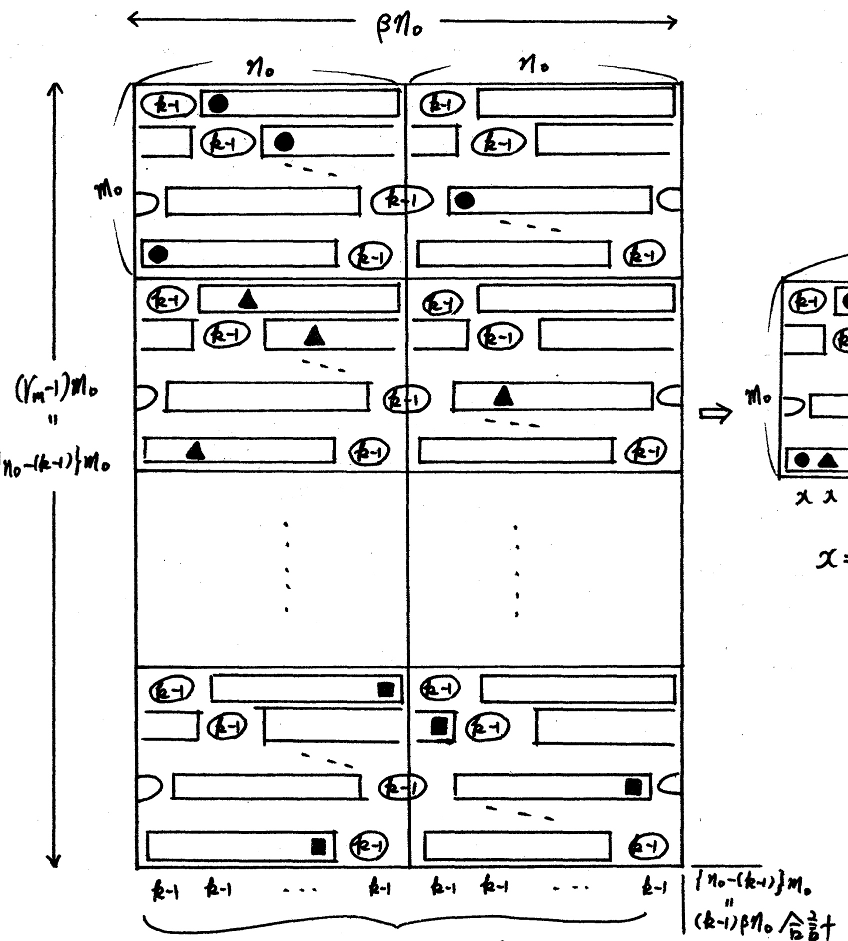
<u>Lemma2</u>　$\alpha=1, \beta>1$のBase条件，m_0はβの倍数 $\Longrightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

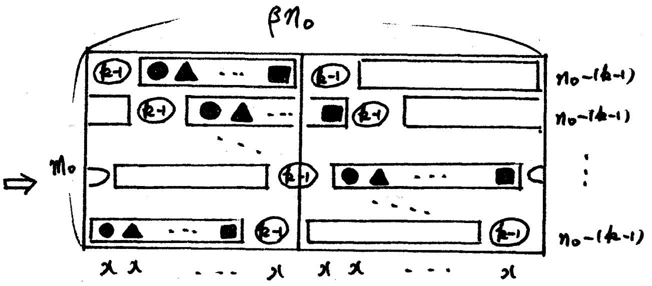
∵領域AはLemma1と同じくヨコ型S_kをm_0個とる。

$$\left.\begin{array}{l} m_0 n_0 = (k-1)t_1 + (k-1)t_2 \\ t_1 = \alpha m_0,\ t_2 = \beta n_0,\ \alpha = 1,\ \beta > 1 \\ r_m - \alpha = n_0 - (k-1)\alpha \end{array}\right\} \text{より} \quad \begin{array}{l} m_0 n_0 = (k-1)m_0 + (k-1)\beta n_0 \\ r_m - 1 = n_0 - (k-1) \end{array}$$

m_0はβの倍数より，$(k-1)m_0$はβn_0の倍数となる。

領域Dでタテ型S_kを次のようにβn_0個とる。





$$x=\frac{\{n_0-(k-1)\}m_0}{\beta n_0}=\frac{(k-1)\beta n_0}{\beta n_0}=k-1$$

$\therefore\ x=k-1$

タテ型 S_k を βn_0 個とる.

Lemma 3　$\beta=1,\ \alpha>1$ の Base 条件, n_0 は α の倍数 $\Longrightarrow K_{m,n}\xrightarrow{F}S_k$

$\because$ Lemma 2 で m と n を入れ替えればよい。

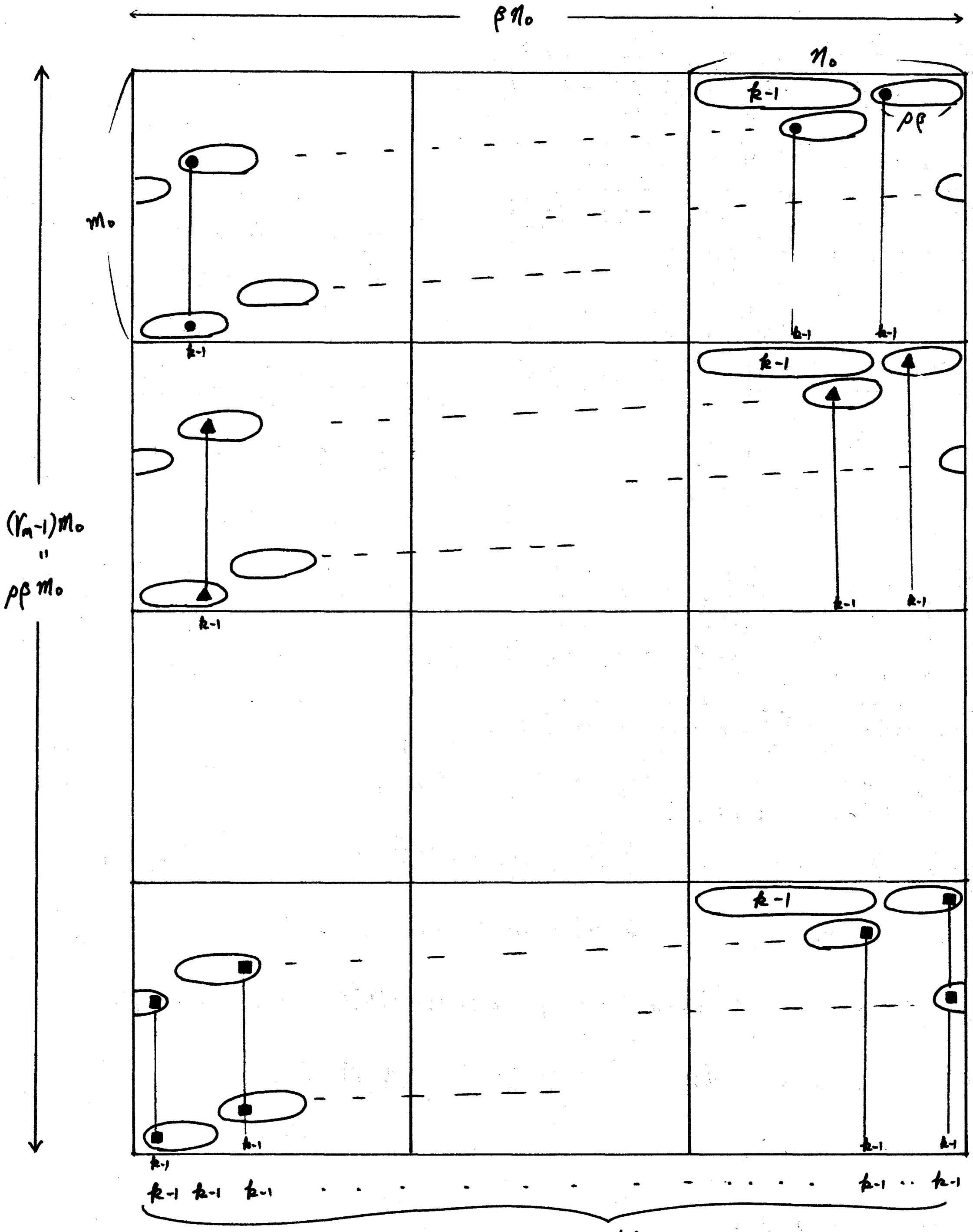
Lemma 4　$\alpha=1,\ \beta>1$ の Base 条件, $n_0-(k-1)$ は β の倍数 $\Longrightarrow K_{m,n}\xrightarrow{F}S_k$

$\because$ 領域 A は Lemma 1 と同じくヨコ型 S_k を m_0 個とる。

$n_0-(k-1)=\rho\beta$ とおく。

$$\left.\begin{array}{l} m_0 n_0=(k-1)t_1+(k-1)t_2 \\ t_1=\alpha m_0,\ t_2=\beta n_0,\ \alpha=1,\ \beta>1 \\ \gamma_m-\alpha=n_0-(k-1)\alpha \end{array}\right\}\text{より}\quad \begin{array}{l}\rho\beta\times m_0=(k-1)\times\beta n_0 \\ \gamma_m-1=\rho\beta\end{array}$$

領域 D でタテ型 S_k を次のように βn_0 個とる。



タテ型 S_k を βn_0 個とる。

<u>Lemma5</u> $\beta=1,\ \alpha>1$ のBase条件, $m_0-(k-1)$ は α の倍数 $\Longrightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

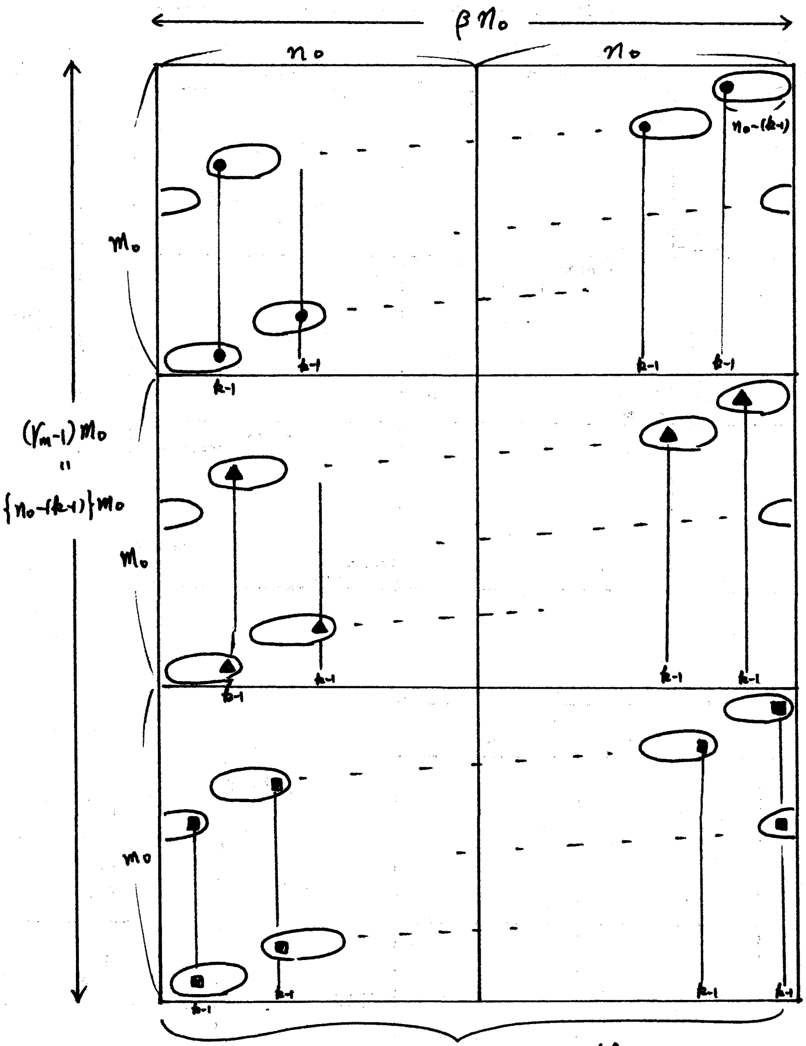
∵ Lemma4 で m と n を入れ替えればよい。

<u>Lemma 6</u>　$\alpha=1,\ \beta>1$ の Base 条件 $\Longrightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

∵ 領域 A は Lemma 1 と同じくヨコ型 S_k を m_0 個とる。

$$\left.\begin{array}{l} m_0 n_0 = (k-1)t_1 + (k-1)t_2 \\ t_1 = \alpha m_0,\ t_2 = \beta n_0,\ \alpha=1,\ \beta>1 \\ r_m - \alpha = n_0 - (k-1)\alpha \end{array}\right\} \text{より} \quad \begin{array}{l} m_0 n_0 = (k-1)m_0 + (k-1)\beta n_0 \\ r_m - 1 = n_0 - (k-1) \\ \therefore \{n_0-(k-1)\} \times m_0 = (k-1) \times \beta n_0 \end{array}$$

領域 D



タテ型 S_k を βn_0 個とる。

<u>Lemma 7</u>　$\beta=1,\ \alpha>1$ の Base 条件 $\Longrightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

∵ Lemma 6 で m と n を入れ替えればよい。

Lemma 8.1 $\alpha, \beta \geqq 2$ のBase条件，$r_n-\beta$ は α の倍数，m_0 は α の倍数，$\{n_0-(k-1)\alpha\}\times\frac{m_0}{\alpha}$ は βn_0 の倍数 $\Longrightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

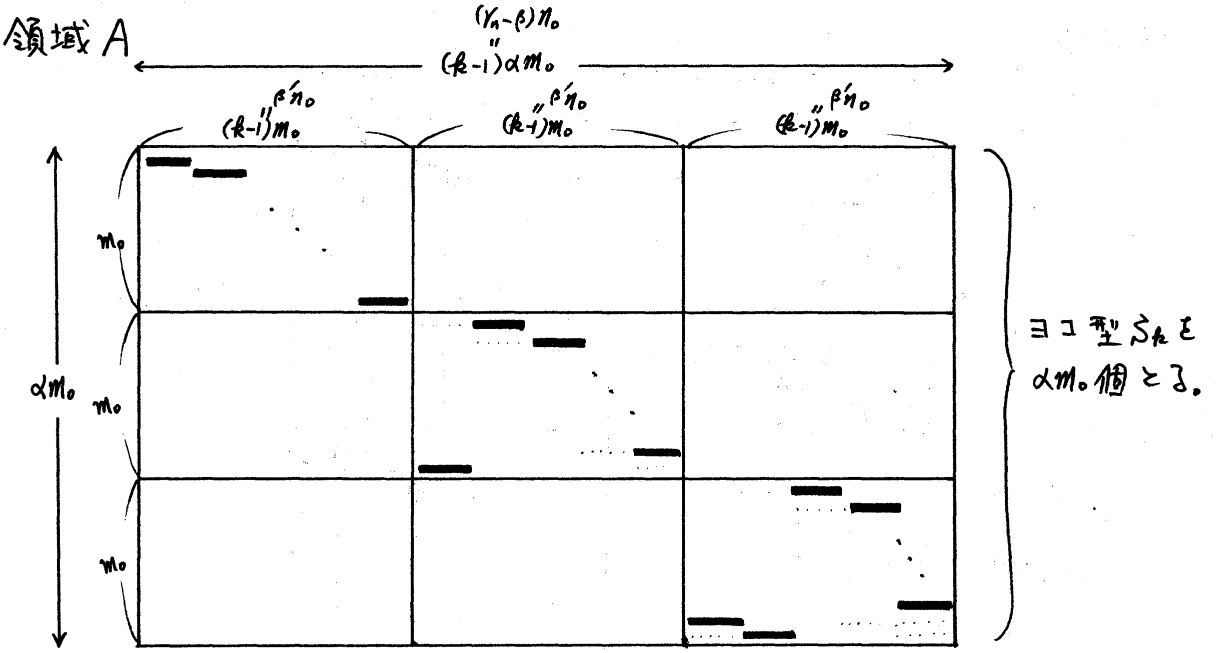
∵
$$\left.\begin{aligned} m_0 n_0 &= (k-1)\alpha m_0 + (k-1)\beta n_0 \\ r_m-\alpha &= n_0-(k-1)\alpha \\ r_n-\beta &= m_0-(k-1)\beta \end{aligned}\right\} \text{より}$$

$\frac{r_n-\beta}{\alpha}=\beta'$ とおく　$\beta' n_0 = \frac{r_n-\beta}{\alpha}n_0 = \frac{\{m_0-(k-1)\beta\}n_0}{\alpha}$

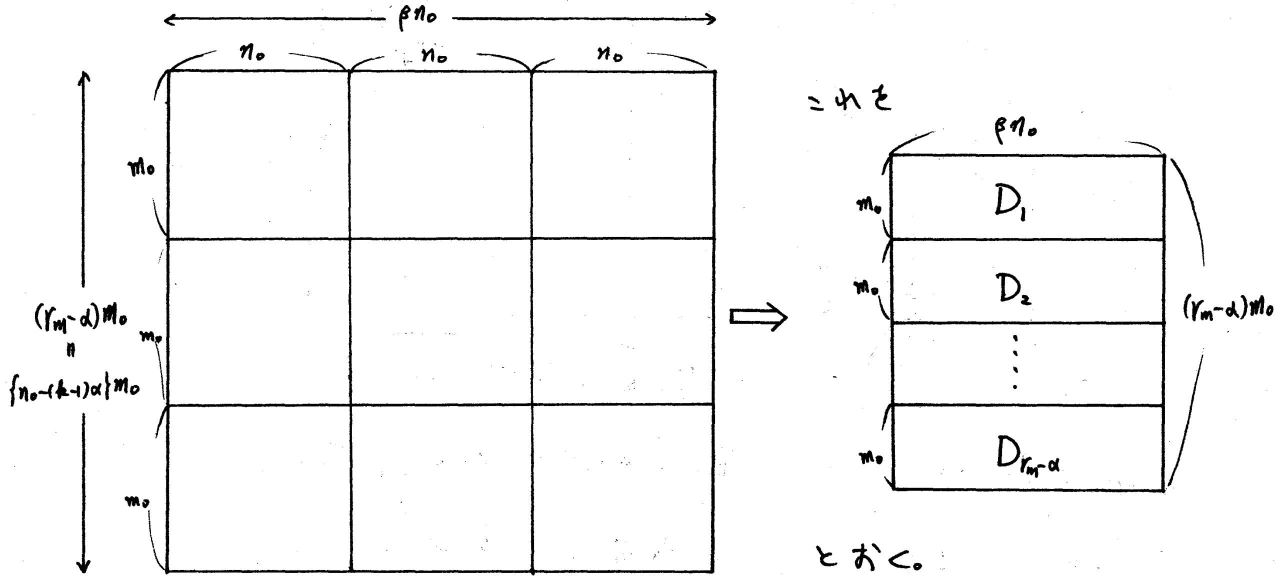
$= \frac{(k-1)\alpha m_0}{\alpha} = (k-1)m_0$

$\therefore\ (k-1)m_0 = \beta' n_0$

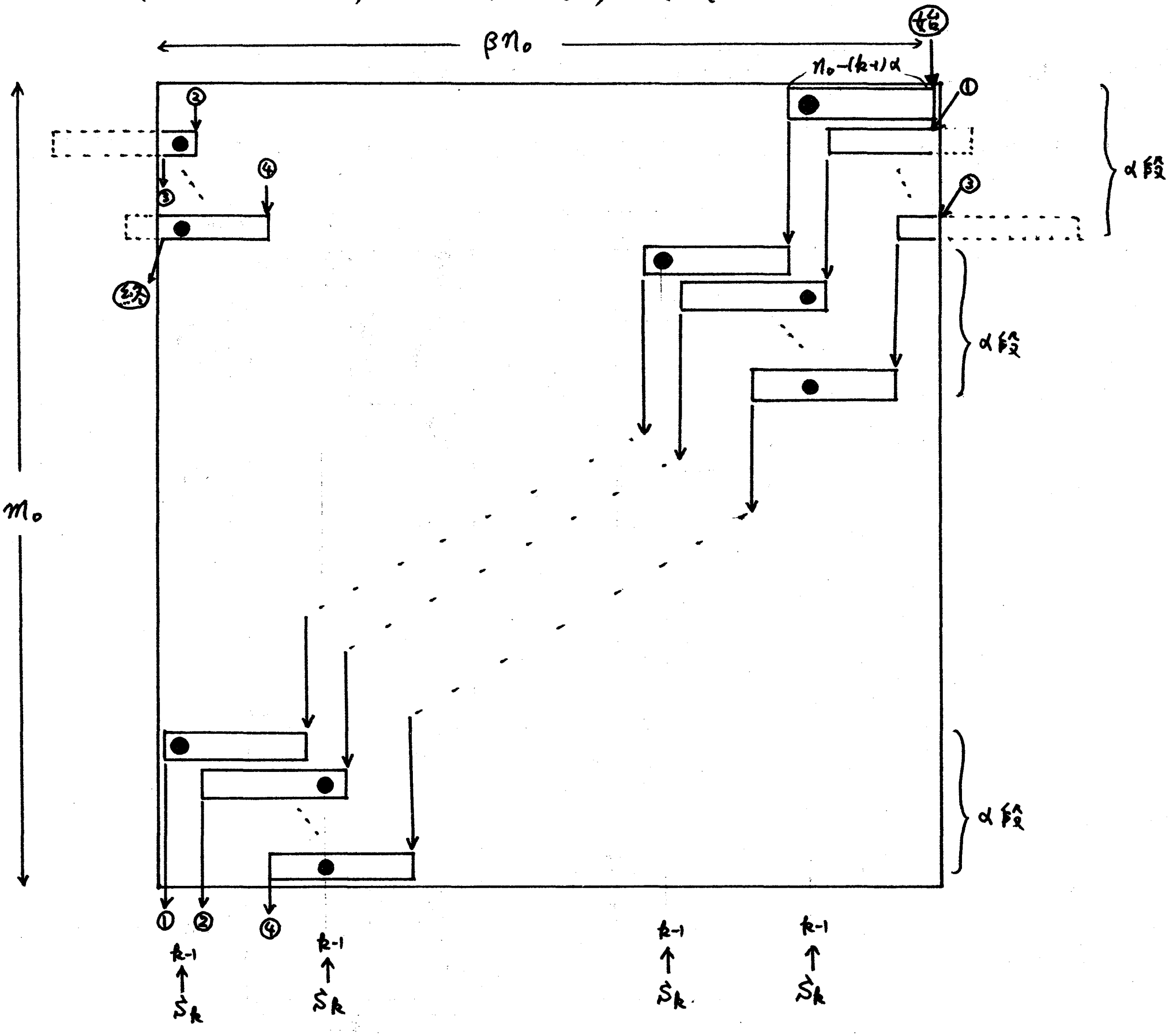
領域A



領域D



m_0はαの倍数，$\{n_0-(k-1)\alpha\}\times\frac{m_0}{\alpha}$は$\beta n_0$の倍数であるから，各領域$D_i$は$m_0$個の$1\times\{n_0-(k-1)\alpha\}$の小領域（これをボックスとよぶ）を図のように$\alpha$段下りに巡回的にもつ。このボックスはタテ型$S_k$がとられる領域である。例えば，領域$D_1$では：



$D_2, D_3, \cdots$では●の位置を1つずつ右へとる。Dでタテ型S_kがβn_0個とられる。

Lemma 9.1 $\left.\begin{array}{l}\alpha,\beta\geqq 2\text{の}Base\text{条件},\ r_m-\alpha\text{は}\beta\text{の倍数}\\ n_0\text{は}\beta\text{の倍数},\ \{m_0-(k-1)\beta\}\times\frac{n_0}{\beta}\text{は}\alpha m_0\text{の倍数}\end{array}\right\}\Longrightarrow K_{m,n}\xrightarrow{F}S_k$

<u>Lemma 8.2</u>　$\alpha,\beta\geqq 2$のBase条件，$r_n-\beta$はαの倍数，m_0はαの倍数，$\{n_0-(k-1)\alpha\}\times\frac{m_0}{\alpha}$は$\beta n_0$の倍数でない $\Big\}\Longrightarrow K_{m,n}\xrightarrow{F}S_k$

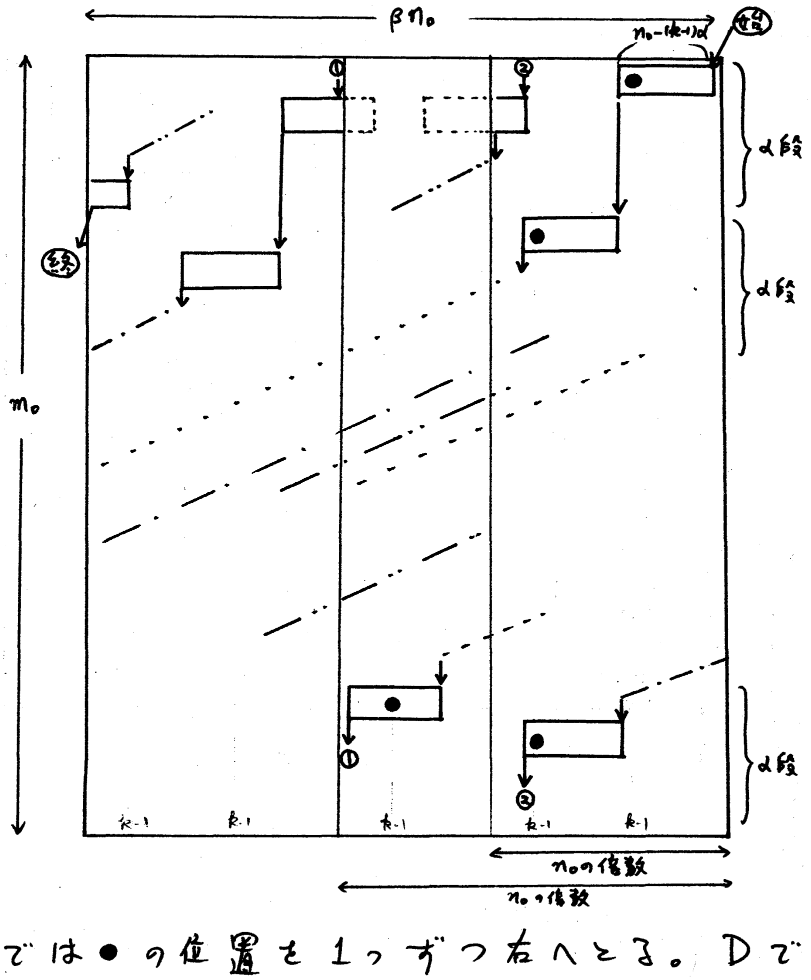
∵ 領域AはLemma 8.1と同じくヨコ型S_kをαm_0個とる。

$$\frac{r_n-\beta}{\alpha}=\frac{m_0-(k-1)\beta}{\alpha}=\frac{m_0}{\alpha}-\frac{(k-1)\beta}{\alpha}\qquad\therefore\ \frac{(k-1)\beta}{\alpha}:\text{integer}$$

$$\{n_0-(k-1)\alpha\}\times\frac{m_0}{\alpha}=\frac{(k-1)\beta n_0}{\alpha}=\frac{(k-1)\beta}{\alpha}\times n_0\qquad\therefore\ \{n_0-(k-1)\alpha\}\times\frac{m_0}{\alpha}\text{ は }n_0\text{ の倍数}$$

各D_iはm_0個のボックスをα段下りた巡回的にもつ。例えば，

D_1では：



$D_2, D_3, \cdots$では●の位置を1つずつ右へとる。Dでタテ型S_kが

βn_0個とられる。

<u>Lemma 9.2</u>　$\alpha,\beta\geqq 2$のBase条件，$r_m-\alpha$はβの倍数，n_0はβの倍数，$\{m_0-(k-1)\beta\}\times\frac{n_0}{\beta}$は$\alpha m_0$の倍数でない $\Big\}\Longrightarrow K_{m,n}\xrightarrow{F}S_k$

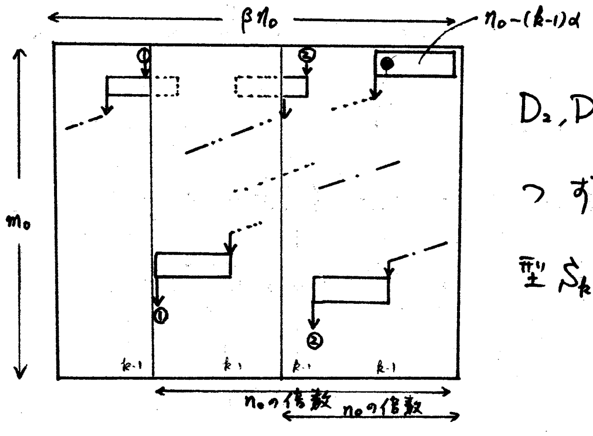
<u>Lemma 8.3</u>　$\left.\begin{array}{l}\alpha,\beta \geqq 2 \text{ の Base 条件}, r_n-\beta \text{ は } \alpha \text{ の倍数} \\ m_0 \text{ は } \alpha \text{ の倍数でない}\end{array}\right\} \Longrightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

∵ 領域AはLemma 8.1と同じくヨコ型 S_k を αm_0 個とる。

$(m_0,\alpha)=d$, $m_0=dm_0'$, $\alpha=d\alpha'$, $(m_0',\alpha')=1$ とおく。$\frac{r_n-\beta}{\alpha}=\beta'$ とおく。

$r_n-\beta=m_0-(k-1)\beta$ より, $m_0-(k-1)\beta=\alpha\beta'$　$(k-1)\beta=m_0-\alpha\beta'$　∴ $\frac{(k-1)\beta}{d}=\frac{m_0-\alpha\beta'}{d}=m_0'-\alpha'\beta'$

このとき, $\{n_0-(k-1)\alpha\}\times m_0'=\frac{\{n_0-(k-1)\alpha\}m_0}{d}=\frac{(k-1)\beta n_0}{d}=\frac{(k-1)\beta}{d}\times n_0$　∴ $\{n_0-(k-1)\alpha\}\times m_0'$ は n_0 の倍数である。各 D_i で, 第1段から出発して m_0' 個のボックスを α 段下りに巡回的にとる。次に, 第2段の続きのボックスから出発して m_0' 個のボックスを α 段下りに巡回的にとる。…終りに, 第 d 段の続きのボックスから出発して m_0' 個のボックスを α 段下りに巡回的にとる。このとき D_i では, m_0 個のボックスが各段1個ずつとられる。例えば, D_1 では:



$D_2, D_3, \cdots$ では ● の位置を1つずつ右へとる。D でタテ型 S_k が βn_0 個とられる。

<u>Lemma 9.3</u>　$\left.\begin{array}{l}\alpha,\beta \geqq 2 \text{ の Base 条件}, r_m-\alpha \text{ は } \beta \text{ の倍数} \\ n_0 \text{ は } \beta \text{ の倍数でない}\end{array}\right\} \Longrightarrow K_{m,n} \xrightarrow{F} S_k$

<u>Lemma 8</u>　$\alpha,\beta\geqq 2$のBase条件, $r_n-\beta$はαの倍数 $\Longrightarrow K_{m,n}\xrightarrow{F} S_k$

∵ Lemma 8.1−8.3 より成立。

<u>Lemma 9</u>　$\alpha,\beta\geqq 2$のBase条件, $r_m-\alpha$はβの倍数 $\Longrightarrow K_{m,n}\xrightarrow{F} S_k$

∵ Lemma 9.1−9.3 より成立。

<u>Lemma 10</u>　$\left.\begin{array}{l}\alpha,\beta\geqq 2\text{のBase条件}\\ r_n-\beta\text{は}\alpha\text{の倍数でない}, r_m-\alpha\text{は}\beta\text{の倍数でない}\end{array}\right\}\Longrightarrow K_{m,n}\xrightarrow{F} S_k$

∵ $\left.\begin{array}{l}(n_0,\alpha)=d_1,\ n_0=d_1n_0',\ \alpha=d_1\alpha',\ (n_0',\alpha')=1\\ (m_0,\beta)=d_2,\ m_0=d_2m_0',\ \beta=d_2\beta',\ (m_0',\beta')=1\end{array}\right\}$とおく。

$r_m-\alpha=n_0-(k-1)\alpha$, $r_n-\beta=m_0-(k-1)\beta$ より, r_mはd_1の倍数, r_nはd_2の倍数。$r_m=d_1r_m'$, $r_n=d_2r_n'$とおく。$m'=r_m'\times m_0'$, $n'=r_n'\times n_0'$とおけば, $m=d_1d_2\times m'$, $n=d_1d_2\times n'$となる。m',n'は定理1の必要条件およびBase条件をみたす。また, $r_n'-\beta'$はα'の倍数, $r_m'-\alpha'$はβ'の倍数がいえるので, Lemma 1−9より $K_{m',n'}\xrightarrow{F} S_k$。拡張定理より
$K_{d_1d_2m',d_1d_2n'}\xrightarrow{F} S_k$　$\therefore K_{m,n}\longrightarrow S_k$.

<u>定理8</u>　定理1の必要条件をみたすパラメータ m,n,k がBase条件をみたすとき, $K_{m,n}$ はS_k因子分解可能。

<u>参考文献</u>

[1] H. Enomoto, T. Miyamoto and K. Ushio, C_k-factorization of complete bipartite graphs, Graphs and Combinatorics 4 (1988) 111−113.

[2] K. Ushio, P_3-factorization of complete bipartite graphs, Discrete Math. 72 (1988) 361−366.